NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

I Les ensembles de nombres

Désignation	*Exemples*	*Notation*
Les *entiers naturels*	0; 1; 2	**N**
Les *entiers relatifs*	**…,** -3; -2; -1; 0; 1; 2, …	**Z**
Les *nombres décimaux* : Un nombre décimal est le quotient d'un entier (relatif) par une puissance de dix.	♦ $\frac{35}{10} = 3{,}5$ ♦ $\frac{-2}{100} = -0{,}02$ ♦ $\frac{42}{10\,000} = 0{,}0042$	**D**
Les *nombres rationnels* : Un nombre rationnel est le quotient de deux nombres entiers relatifs.	♦ $\frac{4}{5} = 0{,}8$ est aussi un nombre décimal ; ♦ $\frac{2}{3} \approx 0{,}6666666666....$ est un nombre rationnel, mais n'est pas un nombre décimal.	**Q**

Il existe d'autres nombres qui ne sont pas des nombres rationnels tels que π ; $\sqrt{2}$: On les appelle des *nombres irrationnels*.
Tous ces nombres sont regroupés dans un ensemble, appelé l'ensemble des *nombres réels* .
On note cet ensemble **R**.

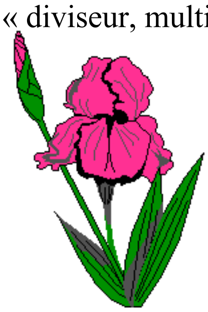
Applications :

Archimède *(III^{è}s a.v J-C)* a approché π par deux nombres rationnels : $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

Chinois *(V^{è}s)* $\pi \approx \frac{355}{113}$

Exercices : A, B, C, D p 18
30, 31, 33 p 28 (Rappel sur le vocabulaire « diviseur, multiple, divisible »)

II Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)



Activité (type Brevet) : Le fleuriste.

Activité

Un fleuriste dispose de 126 iris et de 210 roses.
Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser des bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

① Le fleuriste peut-il réaliser 15 bouquets ? Justifie ta réponse.
② Peut-il réaliser 14 bouquets ? Si oui, est-ce la seule possibilité ?
③ ✓Quel nombre maximal de bouquets peut-il réaliser ?
✓Donne alors la composition de chacun d'eux.

Correction :
*① Le nombre de bouquets doit être un diviseur de 126 **et** de 210 (puisque le fleuriste veut utiliser toutes les fleurs). Or 15 n'est pas un diviseur de 126, donc il ne peut pas faire 15 bouquets.*

② *14 est un diviseur de 126 et de 210 :* $126 \div 14 = 9$

$210 \div 14 = 15$

Donc il peut réaliser 14 bouquets.
Ce n'est pas la seule possibilité, car tous les diviseurs communs à 126 et 210 peuvent représenter le nombre de bouquets à réaliser.
<u>Diviseurs de 126</u> : ***1-2-3-6**-7-9-**14**-18-**21-42**-63-126*
<u>Diviseurs de 210</u> : ***1-2-3**-5-**6-7**-10-**14**-15-**21**-30-35-**42**-70-105-210*

③ *Il peut réaliser au maximum 42 bouquets contenant chacun $126 \div 42 = 3$ iris et $210 \div 42 = 5$ roses.*

<u>Exercices</u> : 54 p 30 (Division euclidienne)
58, 59, 60, 61, 62 p 30 (Critères de divisibilité)
41 p 28 (Problème)

<u>Définition</u> : Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux nombres entiers avec $\boldsymbol{b} \neq 0$.
On dit que $\boldsymbol{b}$ est un diviseur de $\boldsymbol{a}$ s'il existe un entier $\boldsymbol{k}$ tel que $\boldsymbol{a = b \times k}$

<u>Exemple</u> : 5 est un diviseur de 35 car $35 = 5 \times 7$

<u>Remarque</u> : Tous les nombres entiers sauf 1 admettent au moins deux diviseurs.
(Cas particulier de 0)

<u>Propriété</u> : L'ensemble des diviseurs communs à deux entiers $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ admet un plus grand élément, noté PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$).

<u>Rappel</u> : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividende} & \text{Diviseur} \\ \hline \text{Reste} & \text{Quotient} \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \\ \hline & \boldsymbol{r} & \boldsymbol{q} \end{array}$$

$\boldsymbol{a = b \times q + r}$ et $\boldsymbol{r < b}$
où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{r}$ sont des entiers $\boldsymbol{b} \neq 0$

<u>Exemples</u> :

$$\begin{array}{r|l} 123 & 7 \\ \hline 53 & 17 \\ 4 & \end{array} \qquad 123 = 7 \times 17 + 4$$

<u>Propriété</u> : Un diviseur commun à deux entiers $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ non nuls est un diviseur de leur somme, de leur différence et du reste dans la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$.

<u>Démonstration</u> :

Le but de cette partie est de démontrer la propriété précédente.
On suppose que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{r}$ désignent des entiers tels que $\boldsymbol{a = bq + r}$.

1. d désigne un diviseur de b et de r.

♦Justifie que r peut être écrit sous la forme $r = dr'$ où r' désigne un entier et, de même, que b peut être écrit sous la forme $b = db'$ où b' désigne un entier ; *Par définition du diviseur*

♦Exprime $bq + r$ en fonction de d ; $bq + r = db'q + dr' = d(b'q + r')$ *où* $b'q + r' = a'$ *est un entier*

♦En déduire que d est aussi un diviseur de a. $a = bq + r = da'$ *où* a' *est un entier*.

> ***On peut conclure que :***
> *Tout diviseur de* ***b*** *et* ***r*** *est aussi un diviseur de* ***a*** *et* ***b***.

2. d désigne maintenant un diviseur de a et de b.

♦Ecris, en justifiant, a et b en fonction de d comme au 1. ; *Par définition du diviseur, il existe deux entiers* a' *et* b' *tels que* $a = da'$ *et* $b = db'$.

♦Ecris r en fonction de a, de b et de q, puis en fonction de d ; $r = a - bq = da' - db'q = d\,(a' - b'q)$ *où* $a' - b'q = r'$ *est un entier.*

♦En déduire que d est aussi un diviseur de r. $r = dr'$ *où* r' *est un entier.*

> ***On peut conclure que :***
> *Tout diviseur de* ***a*** *et* ***b*** *est aussi un diviseur de* ***r*** *et* ***b***.

3. Que peut-on déduire des conclusions des questions 1. et 2.
En déduire que PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)

a *et* ***b*** *, ainsi que* ***b*** *et* ***r****, ont les mêmes diviseurs.*
Le plus grand élément de l'ensemble de leurs diviseurs est donc leur PGCD.

Conclusion : PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)

Méthode de calcul du PGCD par divisions successives : ***Algorithme d'Euclide***

Algorithme d'Euclide :

Soient a et b deux entiers
Déterminer PGCD (a ; b)

Etape 1 : Effectuer la division euclidienne du plus grand nombre par le plus petit ;

Etape 2 : Effectuer la division euclidienne dont
♦le dividende est le diviseur de l'étape précédente ;
♦le diviseur est le reste de l'étape précédente ;

Déterminer PGCD (420 ; 144)

$$\begin{array}{r|l} 420 & 144 \\ \hline 132 & 2 \end{array}$$

$420 = 144 \times 2 + 132$

dividende = 144
diviseur = 132

$$\begin{array}{r|l} 144 & 132 \\ \hline 12 & 1 \end{array}$$

$144 = 132 \times 1 + 12$

Etape 3 : Si le reste est différent de zéro alors reprendre l'étape 2 ;

Si le reste est égal à zéro alors s'arrêter.

Le reste est égale à 12
alors on reprend l'étape 2
dividende = 132
diviseur = 12

$$\begin{array}{r|l} 132 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 11 \end{array}$$

$132 = 12 \times 11 + 0$

Le reste est égale à 0
alors on s'arrête.

Théorème (Admis) : Par cet algorithme, le dernier reste non nul est le PGCD de ***a*** et ***b***.

Conclusion : PGCD (420 ; 144) = 12

Exemple : Déterminer PGCD (315 ; 72)
Correction :
Par l'algorithme d'Euclide, on effectue les divisions euclidiennes successives :

*Dividende **a** de la division euclidienne*	*Diviseur **b** de la division euclidienne*	*Reste **r** de la division euclidienne*
315	*72*	*27*
72	*27*	*18*
27	*18*	*9*
18	*9*	*0*

Donc PGCD (315 ; 72) = 9

Exercices : 5, 7, 9 p 24
26, 28, 29 p 27 (Problèmes)

III Nombres premiers entre eux

1. Définition :
On dit que deux nombres sont *premiers entre eux* si leur PGCD est égal à 1.

Exemples : ♦32 et 21 Les diviseurs de 32 sont : 1 ; 2 ; 8 ; 16 ; 32.
Les diviseurs de 21 sont : 1 ; 3 ; 7 ; 21.
PGCD (32 ; 21) = 1 donc 32 et 21 sont premiers entre eux.

♦12 et 18 ne sont pas premiers entre eux car ils admettent un diviseur commun supérieur à 1 : 6
$12 = 2 \times 6$ $18 = 3 \times 6$

Exercices : ♦Déterminer PGCD (534 ; 235) (= 1)
Le dernier reste différent de zéro est égal à 1, donc PGCD (534 ; 235) = 1.
On en déduit que 534 et 235 sont premiers entre eux.
♦493 et 223 sont-ils premiers entre eux ?

Exercices : 10, 11, 13, 18 p 25

2. Fractions irréductibles :

Définition : On dit qu'une fraction est *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemples :

♦ $\frac{2}{3}$ est une fraction irréductible car PGCD (2 ; 3) = 1

♦ $\frac{24}{36}$ n'est pas une fraction irréductible car PGCD (24 ; 36) = 12

$$\frac{24}{36} = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{2}{3}$$

Exercices :

♦ Montrer que $\frac{21}{44}$ est une fraction irréductible ;

♦ Expliquer pourquoi $\frac{117}{63}$ n'est pas irréductible.

Méthode pour réduire une fraction :

***a.** En utilisant les critères de divisibilité :*

$$\frac{378}{792} = \frac{189 \times 2}{396 \times 2} = \frac{189}{396} = \frac{63 \times 3}{132 \times 3} = \frac{63}{132} = \frac{21 \times 3}{44 \times 3} = \frac{21}{44}$$

***b**. En utilisant le PGCD :*

Propriété : Pour rendre une fraction irréductible, on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD.

Ecrire $\frac{378}{792}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Il faut déterminer le PGCD (378 ; 792).
On utilise l'algorithme d'Euclide:
792 = 378 × 2 + 36

378 = 36 × 10 + 18

36 = 18 × 2 = 0 donc PGCD (378 ; 792) = 18

$$\frac{378}{792} = \frac{18 \times 21}{18 \times 44} = \frac{21}{44}$$

Exemples : 1.Ecrire $\frac{5655}{17\,835}$ sous forme d'une fraction irréductible.

$\left(= \frac{13}{41} \right)$

2.Ecrire $\frac{3711}{6185}$ sous forme d'une fraction irréductible.

$$\left(= \frac{3}{5} \right)$$

Exercices : 19, 21, 22, 23, 24 p 26